

Мірошніков В.Ю.

*Харківський національний університет будівництва та архітектури
(вул. Сумська, 40, м. Харків, 61002, Україна; e-mail: m0672628781@gmail.com;
orcid.org/0000-0002-9491-0181)*

ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ БАГАТОШАРОВОГО СЕРЕДОВИЩА, ЩО СКЛАДАЄТЬСЯ З ШАРУ І ПІВПРОСТОРУ З ЦИЛІНДРИЧНИМ ВКЛЮЧЕННЯМ

Розв'язана просторова задача теорії пружності для півпростору, який жорстко зв'язаний граничною поверхнею з пружним шаром та має поздовжнє кругове нескінчене циліндричне включення. Шар, півпростір та циліндричне включення – пружні однорідні ізотропні матеріали, відмінні один від одного.

На вільній поверхні шару задані переміщення або напруження. На межі шару та півпростору, а також на межі півпростору та включення задані умови сполучення. Необхідно дослідити напружений стан отриманого композиту.

Розв'язок просторової задачі теорії пружності отримано за допомогою узагальненого методу Фур'є, відносно рівнянь Ламе в циліндричних координатах, пов'язаних з циліндричним включенням та декартових координатах, пов'язаних з шаром та півпростором. Задовольняючи крайовим умовам та умовам сполучення, отримані нескінчені системи лінійних алгебраїчних рівнянь, які розв'язано методом зрізання. В результаті отримані переміщення та напруження в різних точках шару, півпростору та включення.

Проведено числовий аналіз напруженого стану тіла композиту, який складається з півпростору (матеріал – пластик), армованого круглим сталевим стержнем, та має захисний шар зі сталі. Шар ідеально з'єднаний з півпростором, а півпростір ідеально з'єднаний з пружним циліндричним включенням.

Запропонований метод може використовуватись для розрахунку деталей машин, тунелів в гірських породах та інших просторових конструкцій, розрахункові схеми яких відповідають постановці задачі даної роботи.

Ключові слова: композит, півпростір з циліндричним включенням, умови сполучення, узагальнений метод Фур'є.

Вступ. При проектуванні деталей та конструкцій в машинобудуванні важливу роль набувають композитні матеріали, але, враховуючи їх неоднорідність, ефективних методів розрахунку напруженого стану для таких матеріалів знайти досить важко.

Для визначення напруженого стану композиту в більшості робіт пропонуються спочатку провести лабораторні випробування [1-3], або застосувати аналітичні методи [4-6] для моделювання механічних властивостей зразка. Потім на основі отриманих даних розв'язується задача для всього шару.

Інший підхід – це аналітико-числове розв'язання, яке враховує кожну граничну поверхню як доданок до системи рівнянь. Так в роботі [7] розв'язуються просторові (тривимірні) задачі теорії пружності для тіл, які обмежені канонічними поверхнями (циліндр, конус, куля, еліпсоїд, параболоїд та ін.). Точні розв'язки в цій роботі отримані виключно методом розділення змінних і методом Фур'є.

В роботах [8-10], де використовується узагальнений метод Фур'є в поєднанні з методом зображень, розглядаються стаціонарні задачі дифракції пружних хвиль в шарі з циліндричними порожнинами або включеннями.

В роботі [11] узагальнений метод Фур'є був розширений за рахунок теорем додавання, що дозволило розглядати задачі з декількома граничними поверхнями.

Так, на основі узагальненого методу Фур'є, розв'язані задачі для шару зі сферичною порожниною [12], для півпростору з поздовжніми циліндричними порожнинами [11-16], для простору і циліндра з циліндричними порожнинами і включеннями [17]. Задачу для шару з циліндричною порожниною та заданими на граничних поверхнях переміщеннями розглянуто в роботі [18], для шару з пружним включенням в роботі [19, 20], з поздовжньою товстостінною трубою в роботі [21].

Подана робота також оснований на узагальненому методі Фур'є.

Постановка задачі. В пружному однорідному півпросторі, паралельно його поверхні, розташоване кругове циліндричне включення радіусом R . З поверхнею півпростору жорстко зчеплений шар висотою h_1 .

Кругове циліндричне включення будемо розглядати в циліндричній системі координат (ρ, ϕ, z) , півпростір в декартовій системі координат (x_2, y_2, z_2) , яка однаково орієнтована та поєднана з системою координат включення. Межа півпростору знаходиться на відстані $y_2=h_2$. Шар будемо розглядати в декартовій системі координат (x_1, y_1, z_1) , яка розташована відносно системи координат півпростору на відстані $x_2=0, y_2=h_2$.

Необхідно знайти розв'язок рівняння Ламе $\Delta \vec{U}_j + (1 - 2\sigma_j)^{-1} \nabla \text{div} \vec{U}_j = 0$, де σ_j – коефіцієнт Пуассона шару ($j=1$), півпростору ($j=2$) або включення ($j=3$).

На верхній межі шару задано переміщення $\vec{U}_1(x_1, z_1)|_{y_1=h_1} = \vec{U}_h^0(x_1, z_1)$ або напруження $F_1 \vec{U}_1(x, z)|_{y_1=h_1} = \vec{F}_h^0(x, z)$, на межі шару та півпростору умови сполучення

$$\vec{U}_1(x_1, z_1)|_{y_1=0} = \vec{U}_2(x_2, z_2)|_{y_2=h_2}, \quad (1)$$

$$F_1 \vec{U}_1(x_1, z_1)|_{y_1=0} = F_2 \vec{U}_2(x_2, z_2)|_{y_2=h_2}, \quad (2)$$

на межі півпростору та включення умови сполучення

$$\vec{U}_2(\phi, z)|_{\rho=R_1} = \vec{U}_3(\phi, z)|_{\rho=R_1}, \quad (3)$$

$$F_2 \vec{U}_2(\phi, z)|_{\rho=R_1} = F_3 \vec{U}_3(\phi, z)|_{\rho=R_1}, \quad (4)$$

де \vec{U}_1 – переміщення в шарі; \vec{U}_2 – переміщення в півпросторі; \vec{U}_3 – переміщення в циліндричному включенні;

$$F_j \vec{U}_j| = 2G_j \left[\frac{\sigma_j}{1-2\sigma_j} \vec{n} \text{div} U_j + \frac{\partial}{\partial n} \vec{U}_j + \frac{1}{2} (\vec{n} \times \text{rot} \vec{U}_j) \right]; G_j = \frac{E_j}{2(1+\sigma_j)}; \sigma_j, E_j - \text{коефіцієнт}$$

Пуассона та модуль пружності шару ($j=1$), півпростору ($j=2$) або включення ($j=3$);

$$\vec{U}_h^0(x_1, z_1) = U_x^{(1)} \vec{e}_1^{(1)} + U_y^{(1)} \vec{e}_2^{(1)} + U_z^{(1)} \vec{e}_3^{(1)}, \quad (5)$$

$$\vec{F}_h^0(x_1, z_1) = \tau_{yx}^{(h)} \vec{e}_1^{(1)} + \sigma_y^{(h)} \vec{e}_2^{(1)} + \tau_{yz}^{(h)} \vec{e}_3^{(1)}, \quad (6)$$

відомі функції; $\vec{e}_j^{(k)}, j = 1, 2, 3$ – орти декартової ($k=1$) та циліндричної ($k=2$) систем координат.

Усі задані вектори і функції будемо вважати швидко спадними до нуля на

далеких відстанях від початку координат за координатою z для труби та координатами x і z для меж шару.

Розв'язок задачі. Базисні розв'язки рівняння Ламе виберемо у вигляді [11]

$$\begin{aligned} \vec{u}_k^\pm(x, y, z; \lambda, \mu) &= N_k^{(d)} e^{i(\lambda z + \mu x) \pm \gamma y}; \\ \vec{R}_{k,m}(\rho, \phi, z; \lambda) &= N_k^{(p)} I_m(\lambda \rho) e^{i(\lambda z + m\phi)}; \\ \vec{S}_{k,m}(\rho, \phi, z; \lambda) &= N_k^{(p)} [(sign \lambda)^m K_m(|\lambda| \rho) \cdot e^{i(\lambda z + m\phi)}]; \end{aligned}$$

$$k = 1, 2, 3; \quad (7)$$

$$N_1^{(d)} = \frac{1}{\lambda} \nabla; \quad N_2^{(d)} = \frac{4}{\lambda} (\sigma - 1) \vec{e}_2^{(1)} +$$

$$\frac{1}{\lambda} \nabla(y \cdot); \quad N_3^{(d)} = \frac{i}{\lambda} \text{rot}(\vec{e}_3^{(1)} \cdot); \quad N_1^{(p)} = \frac{1}{\lambda} \nabla;$$

$$N_2^{(p)} = \frac{1}{\lambda} \left[\nabla \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + 4(\sigma - 1) \left(\nabla - \vec{e}_3^{(2)} \frac{\partial}{\partial z} \right) \right];$$

$$N_3^{(p)} = \frac{i}{\lambda} \text{rot}(\vec{e}_3^{(2)} \cdot);$$

$$\gamma = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}, \quad -\infty < \lambda, \mu < \infty,$$

де σ – коефіцієнт Пуассона; $I_m(x), K_m(x)$ – модифіковані функції Бесселя; $\vec{R}_{k,m}, \vec{S}_{k,m}, k=1, 2, 3$ – відповідно внутрішні та зовнішні розв'язки рівняння Ламе для циліндра; $\vec{u}_k^{(-)}, \vec{u}_k^{(+)}$ – розв'язки рівняння Ламе для шару.

Розв'язок задачі представимо у вигляді

$$\begin{aligned} \vec{U}_1 &= \sum_{k=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (H_k^{(1)}(\lambda, \mu) \cdot \vec{u}_k^{(+)}(x_1, y_1, z_1; \lambda, \mu; \sigma_1) + \\ &+ \tilde{H}_k^{(1)}(\lambda, \mu) \cdot \vec{u}_k^{(-)}(x_1, y_1, z; \lambda, \mu; \sigma_1)) d\mu d\lambda, \quad (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{U}_2 &= \sum_{k=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_{k,m}(\lambda) \cdot \vec{S}_{k,m}(\rho, \phi, z; \lambda; \sigma_1) d\lambda + \\ &+ \sum_{k=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (H_k^{(2)}(\lambda, \mu) \cdot \\ &\vec{u}_k^{(+)}(x_2, y_2, z_2; \lambda, \mu; \sigma_2)) d\mu d\lambda, \quad (9) \end{aligned}$$

$$\vec{U}_3 = \sum_{k=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_{k,m}(\lambda) \cdot$$

$$\vec{R}_{k,m}(\rho, \phi, z; \lambda), \quad (10)$$

де $\vec{S}_{k,m}(\rho, \phi, z; \lambda), \vec{R}_{k,m}(\rho, \phi, z; \lambda), \vec{u}_k^{(+)}(x, y, z; \lambda, \mu)$ і $\vec{u}_k^{(-)}(x, y, z; \lambda, \mu)$ – базисні розв'язки, які задані формулами (7), а невідомі функції $H_k^{(1)}(\lambda, \mu), \tilde{H}_k^{(1)}(\lambda, \mu), B_{k,m}(\lambda), H_k^{(2)}(\lambda, \mu)$ і $A_{k,m}(\lambda)$ необхідно знайти із граничних умов (5) або (6), а також із умов сполучення (1 – 4).

Для переходу базисних розв'язків між системами координат скористаємось формулами [21].

Для виконання граничних умов на верхній межі шару в переміщеннях, прирівняємо (8), при $y_1=h_1$, заданому $\vec{U}_h^0(x, z)$.

Якщо на верхній межі шару задано напруження, то знайдемо напруження для (8) та прирівняємо, при $y_1=h_1$, заданому $\vec{F}_h^0(x, z)$. Задані функції $\vec{U}_h^0(x, z)$ і $\vec{F}_h^0(x, z)$ попередньо представимо через подвійний інтеграл Фур'є. Так отримаємо три рівняння (по одному на кожну проекцію) з шістьма невідомими $H_k^{(1)}(\lambda, \mu)$, $\tilde{H}_k^{(1)}(\lambda, \mu)$.

Для виконання умов сполучення між шаром та півпростором, підставимо в (1) вирази (8) та (9), скориставшись формулою переходу від базисних розв'язків $\vec{S}_{k,m}$ циліндра до $\vec{u}_k^{(-)}$ шару [21, формула (7)]. Подібну операцію проведемо для напружень (2).

Так отримаємо систему з дев'яти нескінчених рівнянь для невідомих $H_k^{(1)}(\lambda, \mu)$, $\tilde{H}_k^{(1)}(\lambda, \mu)$, $H_k^{(2)}(\lambda, \mu)$ та $B_{k,m}(\lambda)$.

Визначник цієї системи, при заданих на верхній межі шару переміщеннях $\Delta = -16 \cdot \gamma^6 \cdot e^{-3\gamma(h_1-h_2)} \cdot \Phi_1(\gamma)/\lambda^6$, при заданих напруженнях $\Delta = -64 \cdot \gamma^9 \cdot \sigma^3 \cdot e^{-3\gamma(h_1-h_2)} \cdot \Phi_2(\gamma)/\lambda^6$, де $\Phi_1(\gamma)$, $\Phi_2(\gamma)$ – функції, що мають громіздкий вигляд і як наслідок опущені. Дослідження цих функцій показало, що, при $\gamma > 0$, вони мають тільки додатні значення та не обертаються в нуль, як наслідок система рівнянь має єдиний розв'язок.

Виразимо з отриманої системи рівнянь $H_k^{(1)}(\lambda, \mu)$, $\tilde{H}_k^{(1)}(\lambda, \mu)$ та $H_k^{(2)}(\lambda, \mu)$ через $B_{k,m}(\lambda)$.

Для виконання умов сполучення на межі півпростору та включення, розкладемо в (9), при $\rho=R_1$, базисні розв'язки $\vec{u}_k^{(+)}$ по розв'язкам $\vec{R}_{k,m}$, застосовуючи формули переходу [21, формула (8)]. Отриманий вектор, а також вектор (10), при $\rho=R_1$, підставимо в (3). Так отримаємо три нескінчених системи рівнянь в переміщеннях. Подібним чином запишемо три рівняння для напруження (4).

Отримавши систему з шести нескінчених рівнянь, замість $H_k^{(2)}(\lambda, \mu)$ підставимо функцію, що ми виразили через $B_{k,m}(\lambda)$, звільнимось від рядів по m і інтегралів по λ . В результаті отримаємо сукупність шести нескінчених систем

лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення невідомих $B_{k,m}(\lambda)$ і $A_{k,m}(\lambda)$. Ці нескінченні системи мають властивості рівнянь другого роду і, як наслідок, до них можна застосовувати метод редукції.

Розв'язав цю систему рівнянь, знайдемо невідомі $B_{k,m}(\lambda)$ і $A_{k,m}(\lambda)$.

Отримавши значення функцій $B_{k,m}(\lambda)$ можемо знайти значення невідомих $H_k^{(1)}(\lambda, \mu)$, $\tilde{H}_k^{(1)}(\lambda, \mu)$, $H_k^{(2)}(\lambda, \mu)$, які ми раніше виразили через $B_{k,m}(\lambda)$. Цим будуть визначені всі невідомі задачі.

Числові дослідження напруженого стану. В пружному ізотропному півпросторі, паралельно його поверхні, розташоване кругле циліндричне пружне включення. З верхньою межею півпростору ідеально зчеплений пружний ізотропний шар. Шар – сталь, коефіцієнт Пуассона $\sigma_1 = 0,25$, модуль пружності $E_1 = 2 \cdot 10^5$ МПа. Півпростір – пластик, коефіцієнт Пуассона $\sigma_2 = 0,38$, модуль пружності $E_2 = 1,7 \cdot 10^3$ МПа. Включення – сталь, коефіцієнт Пуассона $\sigma_3 = 0,25$, модуль пружності $E_3 = 2 \cdot 10^5$ МПа.

Радіус включення $R=10$ мм. Відстань від центру включення до поверхні півпростору $h_2=20$ мм. Товщина шару $h_1=5$ мм.

На вільній поверхні шару задані напруження $\sigma_y^{(h)}(x, z) = -10^8 \cdot (z^2 + 10^2)^{-2} \cdot (x^2 + 10^2)^{-2}$, $\tau_{yx}^{(h)} = \tau_{yz}^{(h)} = 0$.

Нескінченна система була зрізана до $m=10$. Обчислення інтегралів виконано за допомогою квадратурних формул Філона (для коливних функцій) та Сімпсона (для функцій без коливань). Точність виконання граничних умов за вказаних значень геометричних параметрів 10^{-3} .

На рис.1 представлено напружений стан на верхній межі шару в МПа.

За рахунок суттєвої різниці між матеріалами шару та півпростору, напруження σ_x і σ_z зростає в точці $x=0, z=0$ і стає в 4 рази більше заданого σ_y (рис.1, лінія 1). Крім того напруження σ_z вздовж осі z (рис.1а, лінія 3), та напруження σ_x вздовж осі x (рис.1б, лінія 2), крім від'ємних, також мають додатні величини.

Щодо напружень на нижній межі шару (рис. 2), напруження σ_x і σ_z

набувають максимальних додатних величин в точці $x=0, z=0$.

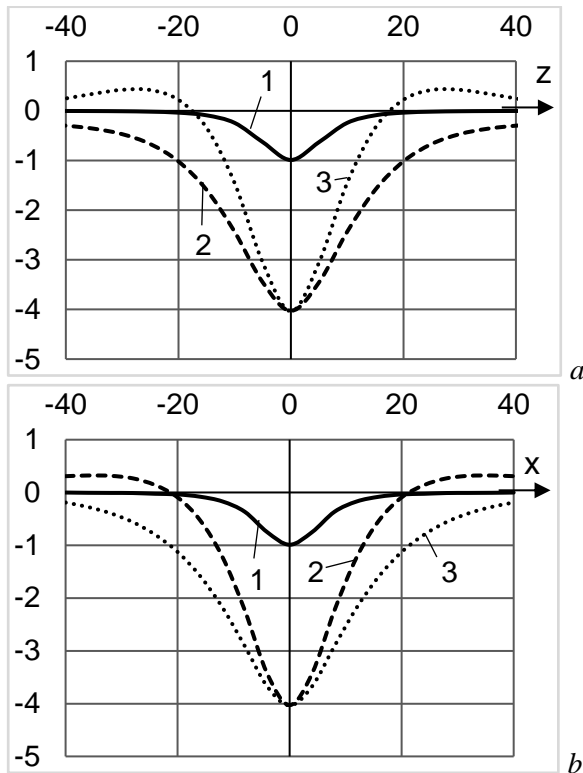


Рис. 1. Напружений стан на верхній межі шару: а – вздовж осі z , при $x=0$; б – вздовж осі x , при $z=0$; 1 – σ_y , 2 – σ_x , 3 – σ_z

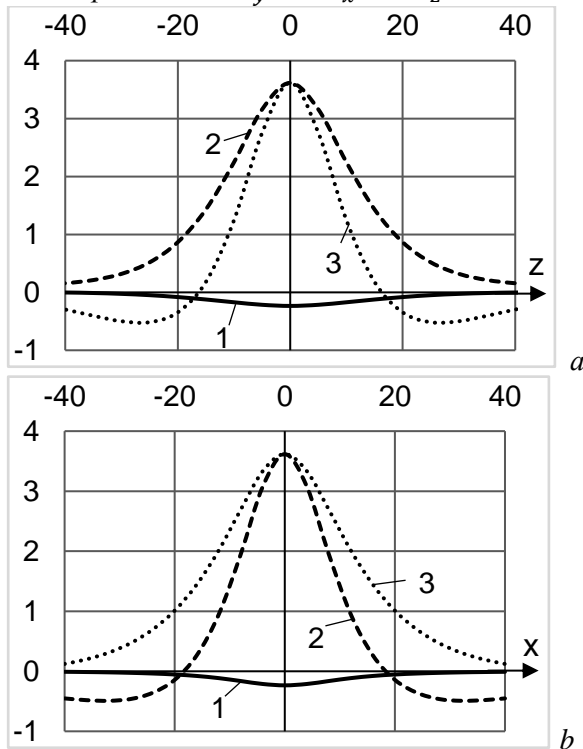


Рис. 2. Напружений стан на нижній межі шару: а – вздовж осі z , при $x=0$; б – вздовж осі x , при $z=0$; 1 – σ_y , 2 – σ_x , 3 – σ_z

Напруження σ_z вздовж осі z (рис. 2а, лінія 3) та напруження σ_x вздовж осі x (рис. 2б, лінія 2), як і на верхній межі шару, крім додатних величин, також мають від’ємні.

На рис. 3 представлений напружений стан на межі включення з поверхнею півпростору в тілі шару (рис. 3а) та на верхній межі включення (рис. 3б) при $z=0$ в МПа.

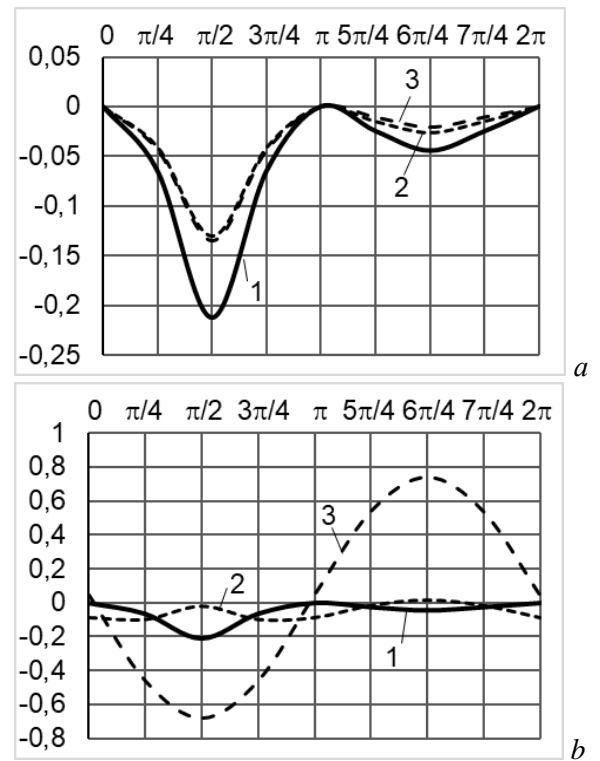


Рис. 3. Напружений стан на межі включення та півпростору: а – в тілі півпростору; б – в тілі включення; 1 – σ_y , 2 – σ_x , 3 – σ_z

На межі включення з півпростором, при однакових σ_y в тілі півпростору та тілі включення (що задано умовами сполучення), напруження σ_x та σ_z в тілі півпростору невеликі і майже однакові (рис.3, лінії 2, 3). Натомість на поверхні включення напруження σ_z має значення близькі до заданого навантаження. При цьому, в верхній частині включення ($\pi/2$) виникають стискаючі напруження, в нижній – розтягувальні.

Висновки. За допомогою узагальненого методу Фур’є запропоновано метод розрахунку задачі теорії пружності для багатошарового середовища у вигляді шару, жорстко з’єданого з півпростором, який має пружне поздовжнє циліндричне

кругле включення. Задача зведена до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь, до якої можна застосувати метод зрізань.

Метод дозволяє з наперед заданою точністю розрахувати напружений стан тіла та може бути використаний при проектуванні деталей машин та інших просторових конструкцій, розрахункова схема яких співпадає з постановкою поданої задачі.

Представлений аналіз напруженого стану може бути використаний при виборі геометричних параметрів конструкції, що проектується.

Подальше дослідження актуальне для збільшення кількості включень або порожнин.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Aitharaju V., Aashat S., Kia H., Satyanarayana A., Bogert P. Progressive damage modeling of notched composites. *NASA Technical Reports Server*. 2016. URL: <https://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/20160012242.pdf>
2. Ершова А. Ю., Мартиросов М. И. Экспериментальные исследования полимерных композитов с мелкодисперсным наполнителем (испытания на растяжение-сжатие). *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2014. № 5. С. 61-69.
3. Hu Junshana, Zhang Kaifu, Cheng Hui, Liu Ping, Zou Peng, Song Danlong. Stress analysis and damage evolution in individual plies of notched composite laminates subjected to in-plane loads. *Chinese Journal of Aeronautics*. 2017. Vol. 30(1). P. 447-460.
4. Pelekh B. L., Makhnitskii R. N. Approximate methods for solving problems on the concentration of stresses around apertures in Orthotropic disks made out of composite materials. *Mechanics of Composite Materials*. 1981. Vol. 16. Iss. 6. P. 690-693.
5. Pobedrya V. E. Gorbachev V. I. Stress and strain concentration in composite materials. *Mechanics of Composite Materials*. 1984. Vol. 20. Iss.2. P. 141-148.
6. Annin B. D., Maksimenko V. N. Evaluation of the failure of plates made of composite materials with holes. *Mechanics of Composite Materials*. 1989. Vol. 25. Iss. 2. P. 216-222.
7. Гринченко, В. Т., Улитко А. Ф. *Пространственные задачи теории упругости и пластичности. Равновесие упругих тел канонической формы*. Київ: Наукова думка. 1985. 280 с.
8. Гузь А. Н., Кубенко В. Д., Черевко М.А. *Дифракция упругих волн*. Київ: Наукова думка. 1978. 307 с.
9. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. *Гармонические колебания и волны в упругих телах*. Київ: Наукова думка. 1981. 284 с.
10. Волчков В. В., Вуколов Д. С., Сторожев В. И. Дифракция волн сдвига на внутренних туннельных цилиндрических неоднородностях в виде полости и включения в упругом слое со свободными гранями. *Механика твердого тела*. 2016. Вып. 46. С. 119-133.
11. Николаев А. Г., Проценко В. С. *Обобщенный метод Фурье в пространственных задачах теории упругости*. Харьков: Нац. аэрокосм. университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», 2011. 344 с.
12. Проценко В. С., Николаев А. Г. Пространственная задача Кирша. *Математические методы анализа динамических систем*. 1982. Вып. 6. С. 3-11.
13. Проценко В. С., Украинец Н. А. Применение обобщенного метода Фурье к решению первой основной задачи теории упругости в полупространстве с цилиндрической полостью. *Вісник Запорізького національного університету*. 2015. Вып. 2. С. 193-202.
14. Мірошніков В.Ю., Олешкевич С.В., Савін О.Б., Медведєва А.В. Змішана задача теорії пружності для півпростору з циліндричними порожнинами та деякими крайовими умовами контактного типу. *Науковий вісник будівництва*. Харків: ХНУБА, 2018. Том 94. № 4. С. 82-94. doi.org/10.29295/2311-7257-2018-94-4-82-94
15. Miroshnikov V. Yu. First basic elasticity theory problem in a half-space with several parallel round cylindrical cavities. *Journal of Mechanical Engineering*. 2018. Vol. 21. № 2. P. 12-18.
16. Protsenko V., Miroshnikov V. Investigating a problem from the theory of elasticity for a half-space with cylindrical cavities for which boundary conditions of contact type are assigned. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2018. Vol 4. № 7 (94). P. 43-50. doi.org/10.15587/1729-4061.2018.139567
17. Николаев А. Г., Танчик Е. А. *Упругая механика многокомпонентных тел*. Харьков: Нац. аэрокосм. ун-т им. Н.Е. Жуковского «ХАИ». 2014. 272 с.
18. Miroshnikov V. Yu. The study of the second main problem of the theory of elasticity for a layer with a cylindrical cavity. *Strength of Materials and Theory of Structures*. 2019. № 102. P. 77-90. doi.org/10.32347/2410-2547.2019.102.77-90
19. Miroshnikov V. Yu., Medvedeva A. V., Oleshkevich S. V. Determination of the Stress State of the Layer with a Cylindrical Elastic Inclusion. *Materials Science Forum*. 2019. Vol. 968. pp. 413-420.

- doi.org/10.4028/www.scientific.net/MSF.968.4
13
20. Мірошніков В.Ю. Змішана задача теорії пружності для шару з циліндричним включенням. *Науковий вісник будівництва*. Харків: ХНУБА, 2019. Том 96. № 2. С. 247-252. doi.org/10.29295/2311-7257-2019-96-2-247-252
 21. Miroshnikov V. Investigation of the Stress Strain State of the Layer with a Longitudinal Cylindrical Thick-Walled Tube and the Displacements Given at the Boundaries of the Layer. *Journal of Mechanical Engineering*. 2019. Vol. 22, N 2. P. 44-52. doi.org/10.15407/pmach2019.02.044

Мирошников В.Ю. ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ МНОГОСЛОЙНОГО СРЕДЫ, СОСТОЯЩЕЙ ИЗ СЛОЯ И ПОЛУПРОСТРАНСТВА С ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ. Решена пространственная задача теории упругости для полупространства, которое жестко связано свободной поверхностью с упругим слоем и имеет продольное круговое бесконечное цилиндрическое включение. Слой, полупространство и цилиндрическое включение - упругие однородные изотропные материалы, отличные друг от друга.

На свободной поверхности слоя заданы перемещения или напряжения. На границе слоя и полупространства, а также на границе полупространства и включения заданы условия сопряжения. Необходимо исследовать напряженное состояние полупространственного композита.

Решение пространственной задачи теории упругости получено с помощью обобщенного метода Фурье, относительно уравнений Ламе в цилиндрических координатах, связанных с цилиндрическим включением и декартовых координатах, связанных со слоем и полупространством. Удовлетворяя краевым условиям и условиям сопряжения, получены бесконечные системы линейных алгебраических уравнений, которые решены методом усечения. В результате получены перемещения и напряжения в различных точках слоя, полупространства и включения.

Проведен численный анализ напряженного состояния тела композита, который состоит из полупространства (материал - пластик), армированного круглым стальным стержнем, и имеет защитный слой из стали. Слой идеально соединен с полупространством, а полупространство идеально соединено с упругим цилиндрическим включением.

Предложенный метод может использоваться для расчета деталей машин, тоннелей в горных породах и других пространственных конструкций, расчетные схемы которых совпадают с постановкой задачи данной работы.

Ключевые слова: композит, полупространство с цилиндрическим включением, условия сопряжения, обобщенный метод Фурье.

Miroshnikov V. Yu. INVESTIGATION OF THE STRESS STATE OF A MULTILAYER MEDIUM CONSISTING OF A LAYER AND HALF-SPACE WITH A CYLINDRICAL INCLUSION. The spatial problem of the theory of elasticity for a half-space is solved, which is rigidly connected by a free surface with an elastic layer and has a longitudinal circular infinite cylindrical inclusion. Layer, half-space and cylindrical inclusion are elastic homogeneous isotropic materials that are different from each other.

The spatial problem of the theory of elasticity for a half-space is solved, which is rigidly connected by a free surface with an elastic layer and has a longitudinal circular infinite cylindrical inclusion. Layer, half-space and cylindrical inclusion are elastic homogeneous isotropic materials that are different from each other.

The solution to the spatial problem of the theory of elasticity is obtained using the generalized Fourier method, with respect to the Lamé equations in cylindrical coordinates associated with a cylindrical inclusion and Cartesian coordinates associated with a layer and half-space. Satisfying the boundary and coupling conditions, we obtain infinite systems of linear algebraic equations that are solved by the truncation method. As a result, displacements and stresses were obtained at various points of the layer, half-space, and inclusion.

A numerical analysis of the stress state of the composite body, which consists of a half-space (material - plastic), reinforced with a round steel rod, and has a protective layer of steel. The layer is ideally connected to the half-space, and the half-space is ideally connected to the elastic cylindrical inclusion.

The proposed method can be used to calculate machine parts, tunnels in rocks and other spatial structures, the design schemes of which coincide with the statement of the problem of this work.

Keywords: composite, half-space with cylindrical inclusion, coupling conditions, generalized Fourier method.

Keywords: composite, half-space with cylindrical inclusion, coupling conditions, generalized Fourier method.