

ВИЗНАЧЕННЯ НДС В ПРУЖНІЙ ПЛИТІ З ЦИЛІНДРОВОЮ ПОРОЖНИНОЮ, ЯКА ЗАДАНА В ЦИЛІНДРИЧНІЙ СИСТЕМІ КООРДИНАТ ТА МЕЖАМИ ПЛИТИ, ЯКІ ЗАДАНІ В ДЕКАРТОВИХ СИСТЕМАХ КООРДИНАТ

Вступ

Розглядаючи просторові задачі теорії пружності, зважаючи на громіздкість і складність обчислень, на сьогоднішній день не достатньо повно досліджено визначення напруження в пружній плиті з циліндровими порожнинами або включеннями. Окремі випадки задачі з осесиметричним об'ємним розширенням одного циліндра досліджені в роботах [1,2]. В даній статті запропонований метод вирішення задачі із заданими переміщеннями на межах циліндрової порожнини розташованої в пружній плиті. Метод заснований на рішенні рівнянь Ляме [1] із застосуванням узагальненого методу Фур'є [4]. За допомогою цього методу дана проблема зведена до нескінченної системи лінійних рівнянь алгебри, яка піддається дослідженню і допускає застосування методу редукції. Рішення представлено через інтеграли і ряди, для яких встановлена абсолютна збіжність.

Запропонований метод рішення може бути поширений на задачі з іншими крайовими умовами.

Постановка задачі

Є циліндрова порожнина в пружній плиті (рис.1), відстань від центру порожнини до верхньої межі дорівнює h_1 , до нижньої межі h_2 . Координати меж плити задаємо в декартовій системі координат відносно системи координат циліндрової порожнини. Граничні умови на поверхні порожнини та на межі полупростору задані через переміщення.

Задача формується таким чином: рішення рівняння Ляме беремо у формі

$$\begin{aligned} \vec{U} = & \sum_{k=1}^3 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda (B_{k,m}(\lambda) \cdot \vec{S}_{k,m}(\rho_1, \phi_1, z_1; \lambda) \cdot e^{im\phi_1 + i\lambda z_1}) + \\ & + \sum_{k=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (H_k(\lambda, v) \cdot \vec{u}_k^+(x_1, y_1, z_1; \lambda, v) + \\ & + H_k^*(\lambda, v) \cdot \vec{u}_k^-(x_1, y_1, z_1; \lambda, v)) d\lambda dv \end{aligned} \quad (1)$$

де $B_{k,m}(\lambda)$, $H_{k,m}^*(\lambda, v)$, $H_k(\lambda, v)$,

- невідомі функції, які необхідно знайти з крайових умов

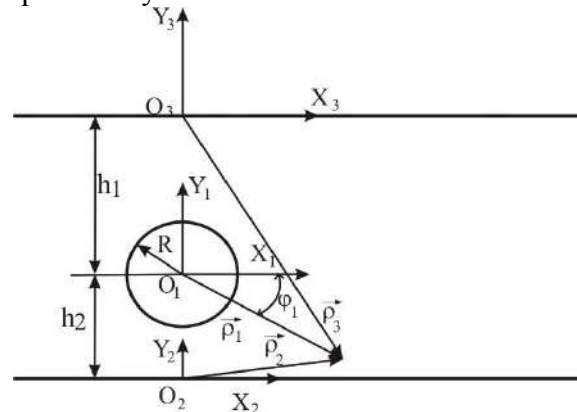


Рис.1. Циліндрова порожнина в пружній плиті.

$$\begin{aligned} \vec{S}_{1,m}(\rho_1, \phi_1, z_1; \lambda), \quad \vec{S}_{2,m}(\rho_1, \phi_1, z_1; \lambda), \\ \vec{S}_{3,m}(\rho_1, \phi_1, z_1; \lambda), \\ \vec{u}_1^+(x, y, z; \lambda, v), \quad \vec{u}_2^+(x, y, z; \lambda, v), \\ \vec{u}_3^+(x, y, z; \lambda, v), \\ \vec{u}_1^-(x, y, z; \lambda, v), \quad \vec{u}_2^-(x, y, z; \lambda, v), \\ \vec{u}_3^-(x, y, z; \lambda, v), \end{aligned} \quad (3)$$

- базисні рішення для однієї циліндрової порожнини відносно внутрішніх рішень іншої циліндрової порожнини дорівнюють:

$$\begin{aligned} \vec{S}_{1,m}(\rho, \phi, z; \lambda) &= \frac{1}{\lambda} \text{grad}(S_m(\rho, \phi, z; \lambda)), \\ \vec{S}_{2,m}(\rho, \phi, z; \lambda) &= \frac{1}{\lambda} \left[\text{grad} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + 4(\mu - 1) \left(\text{grad} - \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \right] \cdot S_m(\rho, \phi, z; \lambda) \\ \vec{S}_{3,m}(\rho, \phi, z; \lambda) &= \frac{i}{\lambda} \text{rot}[\vec{e}_z \cdot S_m(\rho, \phi, z; \lambda)], \end{aligned}$$

$S_m(\rho, \varphi, z; \lambda) = e^{i(\lambda \cdot z + m \cdot \varphi)} \cdot K_m(|\lambda| \rho) \cdot (\text{sign}(\lambda))^m$
 μ - коефіцієнт Пуассона, $K_m(x)$ - функція Бесселя уявного аргументу

- базисні рішення для межі плити відносно внутрішніх рішень циліндрової порожнини дорівнюють:

$$\begin{aligned}\vec{u}_1^\pm(x, y, z; \lambda, v) &= \frac{1}{\lambda} (iv\vec{e}_x \pm v\vec{e}_y + i\lambda\vec{e}_z) e^{ivx \pm vy + i\lambda z} \\ \vec{u}_2^\pm(x, y, z; \lambda, v) &= \frac{1}{\lambda} (iv\vec{e}_x + ((4\mu - 3) \pm v\gamma)\vec{e}_y + i\lambda\vec{e}_z) e^{ivx \pm vy + i\lambda z} \\ \vec{u}_3^\pm(x, y, z; \lambda, v) &= \frac{1}{\lambda} (\pm iv\vec{e}_x + v\vec{e}_y) e^{ivx \pm vy + i\lambda z}, \quad v = \sqrt{\lambda^2 + v^2}\end{aligned}$$

Крайові умови на площині циліндра та межах плити задані у виді рядів та інтегралів, що абсолютно сходяться

$$\begin{aligned}\vec{U}(R_1, \phi_1, z_1) &= \vec{f}(\phi_1, z_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} [A_1^m(\lambda) \vec{e}_{\rho 1} + A_2^m(\lambda) \vec{e}_{\phi 1} + A_3^m(\lambda) \vec{e}_{z 1}] \cdot e^{im\phi_1 + \lambda z} d\lambda \\ \vec{U}(x, h_1, z) &= \vec{f}(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (C_1(\lambda, v) \vec{e}_x + C_2(\lambda, v) \vec{e}_y + C_3(\lambda, v) \vec{e}_z) \cdot e^{i\lambda z + ivx} d\lambda dv \\ \vec{U}(x, h_2, z) &= \vec{f}(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (C_1^*(\lambda, v) \vec{e}_x + C_2^*(\lambda, v) \vec{e}_y + C_3^*(\lambda, v) \vec{e}_z) \cdot e^{i\lambda z + ivx} d\lambda dv\end{aligned} \quad (4)$$

Якщо функції (2) будуть знайдені, то з (1) одержуємо переміщення і по нижче приведених формулах можемо знайти напруження:

$$\begin{aligned}\sigma_\rho &= 2 \cdot G \cdot \frac{\partial U_\rho}{\partial \rho} + \lambda_0 \theta, \quad \sigma_\phi = \frac{2 \cdot G}{\rho} \cdot \left(\frac{\partial U_\phi}{\partial \phi} + U_\rho \right) + \lambda_0 \theta, \\ \sigma_z &= 2 \cdot G \cdot \frac{\partial U_z}{\partial z} + \lambda_0 \theta, \quad \tau_{\rho\phi} = \tau_{\phi\rho} = G \left(\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial U_\rho}{\partial \phi} + \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \cdot \frac{U_\phi}{\rho} \right), \\ \tau_{\rho z} &= \tau_{z\rho} = G \left(\frac{\partial U_z}{\partial \rho} + \frac{\partial U_\rho}{\partial z} \right), \quad \tau_{\phi z} = \tau_{z\phi} = G \left(\frac{\partial U_\phi}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial U_z}{\partial \phi} \right),\end{aligned} \quad (5)$$

де G - модуль зсуву λ_0 - постійна Ляме

$\theta = \frac{\partial U_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial U_\phi}{\partial \phi} + \frac{U_\rho}{\rho} + \frac{\partial U_z}{\partial z}$ - об'ємне розширення.

Наскільки авторам відомо, зважаючи на складність, подібна задача раніше не вивчалася.

Метод проведення рішення

В основу методу встановлені формули переходу в базисних рішеннях рівняння Ляме від однієї системи координат до іншої (вони отримані авторами справжньої статті з відповідних формул, узятих з довідника [6]).

Перехід від системи координат меж плити до координат циліндрової порожнини дорівнюють:

$$\begin{aligned}\vec{u}_k^+ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} (i\omega_1)^m \vec{R}_{k,m}, \quad k = 1, 3 \\ \vec{u}_2^+ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{(i\omega_1)^m}{\lambda^2} [mv\vec{R}_{1,m} + \gamma\vec{R}_{2,m} + 4v(1 - \mu)\vec{R}_{3,m}] \\ \omega_1(\lambda, v) &= \frac{v - \gamma}{\lambda},\end{aligned} \quad (6)$$

де $\vec{R}_{1,n}(\rho_2, \varphi_2, z_2)$, $\vec{R}_{2,n}(\rho_2, \varphi_2, z_2)$, $\vec{R}_{3,n}(\rho_2, \varphi_2, z_2)$ - базисні рішення зовні пружного циліндра, які дорівнюють:

$$\begin{aligned}\vec{R}_{1,m}(\rho, \varphi, z; \lambda) &= \frac{1}{\lambda} \text{grad}(r_m(\rho, \varphi, z; \lambda)), \\ \vec{R}_{2,m}(\rho, \varphi, z; \lambda) &= \frac{1}{\lambda} \left[\text{grad} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + 4(\mu - 1) \left(\text{grad} - \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \right] \cdot r_m(\rho, \varphi, z; \lambda),\end{aligned}$$

$$\vec{R}_{3,m}(\rho, \varphi, z; \lambda) = \frac{i}{\lambda} \text{rot}[\vec{e}_z \cdot r_m(\rho, \varphi, z; \lambda)],$$

$$r_m(\rho, \varphi, z; \lambda) = e^{i(\lambda \cdot z + m \cdot \varphi)} \cdot I_m(\lambda \rho)$$

$$\sum_{s=1}^3 [B_{s,m} \cdot r_{s,k,m}] = A_{k,m} - \sum_{s=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} q_{k,s,m} H_s(\lambda, v) + q_{k,s,m}^* H_s(\lambda, v) dv$$

$$\sum_{s=1}^3 (H_s d_{s,k} + H_s^* d_{s,k}^*) = C_k(\lambda, v) - \sum_{r=1}^3 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(B_{r,n} \cdot \sum_{p=1}^3 g_{n,r,p} \cdot d_{p,k}^* \right)$$

$$\sum_{s=1}^3 (H_s d_{s,k} + H_s^* d_{s,k}^*) = C_k^*(\lambda, v) - \sum_{r=1}^3 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(B_{r,n} \cdot \sum_{p=1}^3 g_{n,r,p}^* \cdot d_{p,k} \right), \quad k = 1, 2, 3 \quad (7)$$

де $r_{s,k,m}$, $q_{s,k,m}$, $q_{s,k,m}^*$, $d_{s,k}$, $g_{s,k,m}$, $g_{s,k,m}^*$ - це функції (3), отримані в результаті перетворень за допомогою функцій перерозподілу (6), та у зв'язку з громіздкістю опущені.

В результаті рішення системи нескінченних рівнянь, отримаємо невідомі функції (2).

Якщо тепер підставимо знайдені функції (2) у формулу (1), а також задамо значення ρ_1, φ_1, z_1 і відповідні їм x_1, y_1, z_1 та x_2, y_2, z_2 то отримаємо значення переміщення у відповідній точці простору. Задавши точку на поверхні циліндра, або площини межі плити, можемо перевірити виконання граничних умов.

Провівши перетворення функцій (3), згідно формулам (5), отримаємо повний тензор напруження (зважаючи на громіздкість ці перетворення опускаємо). Тепер можемо визначити напруження в будь-якій точці простору в системі координат першого циліндра.

Обговорення результатів

Задача розв'язувалася в оболонці MathCad 12.

На межі циліндра була задана функція переміщення у вигляді $U_\rho = \frac{h^5 \cdot \cos(\varphi)}{(z^2 + h^2)^2}$, $U_z = 0$, $U_\varphi = 0$, при $h_1 = 10$, $h_2 = 20$ (графічно зображено на рис.2.).

Задовольняючи крайовим умовам (4), підставляючи їх у формулу (1), через функції перерозподілу (6) отримаємо три нескінченні системи рівнянь, зв'язані невідомими функціями (2).

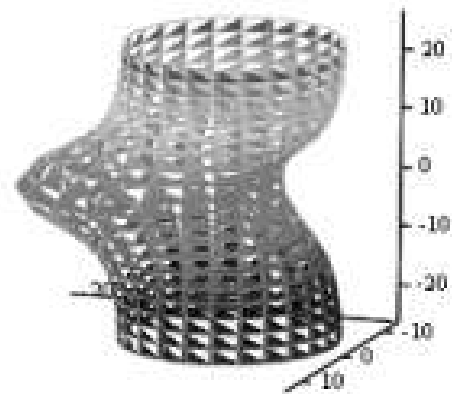


Рис.2. Граничні умови на циліндрі

На межах плити всі переміщення прийняті рівними нулю. В результаті рішення системи рівнянь були знайдені функції (2), перевірено виконання граничних умов на циліндрах і на межах плити (отримані переміщення у вузлових точках) і отримана функція для визначення напруження.

Нескінченна система рівнянь була зведена до кінцевої: $m=3$, межі інтеграції були узяті від $-3 \dots 3$, що є достатнім при $R_1 = 10$, $h_1=45$, $h_2=90$. Точність виконання граничних умов в цьому випадку досягає 10^{-5} .

Формула квадратури для обчислення інтегралів була вибрана по щонайвищому тригонометричному ступеню точності [3]. Число вузлових точок – 400.

В результаті підстановки різних варіантів R_1 , h_1 , h_2 приходимо до висновку, що

скорочення відстані між краєм циліндрів і межею плити приводить до зменшення точності рахунку. Характерним також є те, що скорочення відстані між межею плити та найближчим циліндром більш впливає на точність розрахунку ніж скорочення відстані між циліндрами.

У порівнянні з задачею, коли циліндрові порожнини задані в полупросторі (якщо межі порожнин задані в циліндричних координатах, а межа полупростору задана в декартових координатах) [7], тривалість розрахунку суттєво зменшується з той причини, що відсутні переходи між циліндричними системами. У порівнянні з розрахунком, коли межі плити задаються, як дзеркальні в циліндрових координатах [8], точність розрахунку на віддалених ділянках плити значно вища та тривалість розрахунку в декілька разів швидше. Недоліком (в тому ж порівнянні) є те, що система нескінченних рівнянь є не уніфікованою та при зміні кількості елементів (порожнин або меж конструкції) система змінюється не пропорційно, та вимагає математичного отримання рівнянь.

Висновки

Запропонований метод для вирішення задачі просторової теорії пружності, коли на межі циліндрової порожнини і на межах плити задані переміщення. Даний метод можна використовувати і при збільшенні числа циліндрових порожнин, в цьому випадку необхідно внести відповідні зміни у систему рівнянь (7).

УДК 691.32

Романенко О.В.

Українська державна академія залізничного транспорту

АНАЛІЗ МАТЕРІАЛІВ ДЛЯ ВИРОБНИЦТВА ЗАЛІЗОБЕТОННИХ ШПАЛ НА ЗАВОДАХ ЗБШ УКРАЇНИ

Виробництво залізобетону, у т.ч. залізобетонних шпал, відноситься до найбільш енергоємних галузей будівельної індустрії. В загальному балансі підприємства витрата енергії на тепловологісну обробку (ТВО) звичайно досягає 60 %, а про-

Проведені дослідження системи дають можливість стверджувати, що її рішення існує і може бути з будь-яким ступенем точності знайдено методом редукції.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Безухов Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. – М.: Высшая школа, 1961. – 537с.
2. Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости. – М.: Техничко-теоретическая литература, 1955. – 491с.
3. Крылов В.И. и др. Вычислительные методы высшей математики. Т.1. – Минск.: Высшая школа, 1972. – 584с.
4. Ніколаєв О.Г. Узагальнений метод Фур'є в просторових задачах теорії пружності для канонічних многозв'язних тіл: Автореф. дис. д-ра фіз. - мат. наук: 01.02.04. / ДНУ. Дніпропетровськ, 1997. - 36 с.
5. Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения. - М.: ГИТТЛ, 1953. - 380 с.
6. Ерофеев В.Т. Теоремы сложения: Справочник. - Минск: Наука и техника, 1989. - 256 с.
7. Мірошніков В.Ю. та інші. Визначення НДС в пружному полупросторі з циліндровими порожнинами, які задані в циліндричних системах координат та межею полупростору, яка задана в декартовій системі координат: Науковий вісник будівництва.- Вип. 2(76).- Харків: ХОТВАБУ ХНУБА.- 2014.- С.81-85.
8. Мірошніков В.Ю. та інші. Визначення тензора напруження в пружній плиті з циліндровою порожниною: Науковий вісник будівництва.- Вип. 72.- Харків: ХОТВАБУ ХНУБА.- 2013.- С.161-167.

парувальні камери займають 40–60 % виробничих площ, фондівіддача яких українська – 30–55 %. Отже, розробка і впровадження заходів із ресурсоенергозбереження у виробництві залізобетону, у т.ч. залізобетонних шпал, є актуальним завданням. В УкрДАЗТ спільно з КНУБА